MATERIAL DÉCIMO AÑO - MATEMÁTICA Trabajo a Distancia (apoyo)

Tema 1: Geometría Analítica

Circunferencia

Recordemos la fórmula para determinar la distancia entre dos puntos, vista el año anterior.

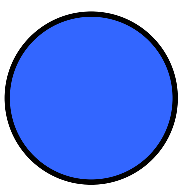
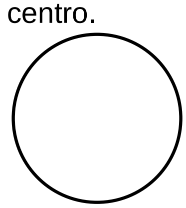
$$d\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

<u>Ejemplo:</u> Determine la distancia entre los siguientes puntos $(4, -7)\ y\ (-6{,}8)$

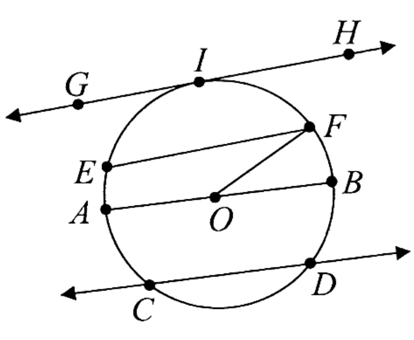
$$d\big((4, -7), (-6{,}8)\big) = \sqrt{(4 - -6)^2 + (-7 - 8)^2} = 5\sqrt{13}$$

Para análisis: https://www.geogebra.org/m/yutpe24g#material/kjrbhwgq

Conocimientos previos

Círculo: Es la superficie plana limitada por la circunferencia y todos sus puntos interiores. 	**Circunferencia:** Es la curva geométrica plana, cerrada, cuyos puntos equidistan de un punto interior llamado centro. 

<u>ELEMENTOS DEL CÍRCULO Y LA CIRCUNFERENCIA</u>

Representación Grafica	Representación Simbólica	Definición
	$\overleftrightarrow{GH}$	**Recta Tangente:** Interseca a la circunferencia en un solo punto (Punto de tangencia).
	$\overleftrightarrow{CD}$	**Recta Secante:** Interseca a la circunferencia en dos puntos distintos.
	$\overline{EF}$	**Cuerda:** Es el segmento que une dos puntos de la circunferencia.
	O	**Centro del Circulo:** Punto fijo del cual equidistan todos los puntos de la circunferencia.
O: centro de la circunferencia	$\overline{AB}$	**Diámetro:** Es la cuerda de mayor longitud y que pasa por el centro del círculo.
	$\overline{OB}$	**Radio:** Es el segmento que une el centro con un punto cualquiera de la circunferencia.

	$\widehat{FB}$ $\measuredangle FOB$	**Arco:** Es la porción de la circunferencia comprendida entre dos puntos diferentes de ella. **Ángulo Central:** Es el ángulo formado por dos radios, el vértice es el centro del círculo.

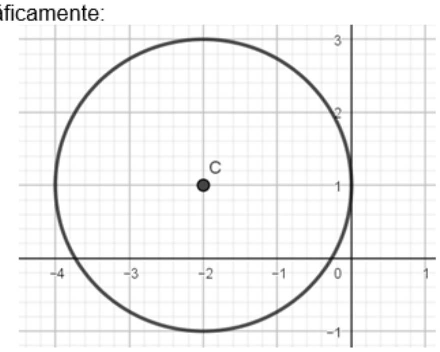
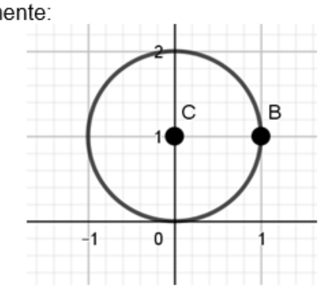
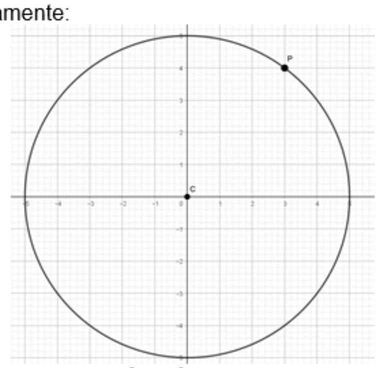
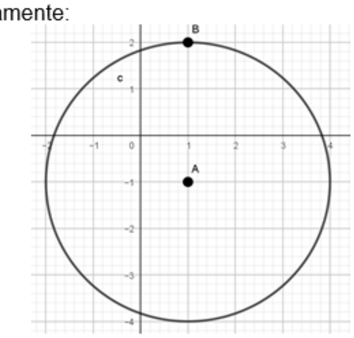
Definición:

Dada una circunferencia C, de centro (a, b) y radio r, su ecuación canónica está dada por $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

Si el centro de la circunferencia es el origen del sistema de coordenadas el punto (0,0) entonces la ecuación es:

$$x^2+y^2=r^2.$$

- Para representar una circunferencia de forma gráfica, dado su centro y su radio, se ubica el centro en el sistema de coordenadas, luego se traza un radio y se mide con el compás. Con ese radio y el centro dado se traza la circunferencia.
- Para representar **una circunferencia de forma algebraica o analítica**, dado su centro y su radio, se considera la ecuación canónica y se procede a sustituir los parámetros correspondientes en la ecuación al centro y al radio de la circunferencia

Ejemplo 1 La circunferencia de centro C(-2,1) y radio r=2. Gráficamente:  Algebraicamente: $(x+2)^2+(y-1)^2=4$	**Ejemplo 2** La circunferencia de centro C(0,1) y radio r=1. Gráficamente:  Algebraicamente: $x^2+(y-1)^2=1$
Ejemplo 3 La circunferencia de centro C(0,0) y radio r=5. Gráficamente:  Algebraicamente: $x^2+y^2=25$	**Ejemplo 4** La circunferencia de centro A(1,-1) y radio r=3. Gráficamente:  Algebraicamente: $(x-1)^2+(y+1)^2=9$

- **Punto interior, exterior y en la circunferencia (sobre la circunferencia) a una circunferencia (de forma algebraica, gráfica y en la calculadora)**
  https://www.youtube.com/watch?v=EBVpfkwpnBQ

  Recordemos que: $(x-h)^2+(y-k)^2>r^2$ el punto es exterior

  $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ el punto es frontera **(en la circunferencia o sobre la circunferencia)**

  $(x-h)^2+(y-k)^2<r^2$ el punto es interior

Ejemplo: Determine si los puntos dados a cada circunferencia es un punto exterior, interior

o frontera.

a) $(x-1)^2+(y-3)^2=4$ y $A(\overbrace{-1}^{x},\overbrace{5}^{y})$

Se sustituye el punto A en la circunferencia $(-1-1)^2+(5-3)^2 \quad > \quad 4$

$(-2)^2+(2)^2 \quad > \quad 5$

$8 \; > \quad 4$

El punto **A es exterior** a la circunferencia.

b) $x^2+(y+3)^2=26$ y $P(\overbrace{-5}^{x},\overbrace{-2}^{y})$

Se sustituye el punto P en la circunferencia $(-5)^2+(-2+3)^2 \quad = \quad 26$

$(-5)^2+(1)^2 \quad = \quad 26$

$26 \quad = \quad 26$

El punto **P esta sobre la circunferencia(frontera)** a la circunferencia.

c) $(x-2)^2+y^2=25$ y $Q(\overbrace{4}^{x},\overbrace{-3}^{y})$

Se sustituye el punto A en la circunferencia $(4-2)^2+(-3)^2 \quad < \quad 25$

$(2)^2+(-3)^2 \quad < \quad 25$

$13 \; < \quad 25$

El punto **Q es interior** a la circunferencia.

- **Traslaciones de circunferencia en el plano cartesiano**
  https://www.youtube.com/watch?v=NC225Rgya94

> **Traslación de una Circunferencia**
> Trasladar una circunferencia significa mover a través de un vector $\vec{V}(x, y)$ la circunferencia, cambiando así la coordenada de su centro pero manteniendo su radio.

Por ejemplo:
Se tiene la circunferencia $(x+2)^2+(y+1)^2=4$ se aplica una traslación de $\vec{V}(3,4)$.
Solución:

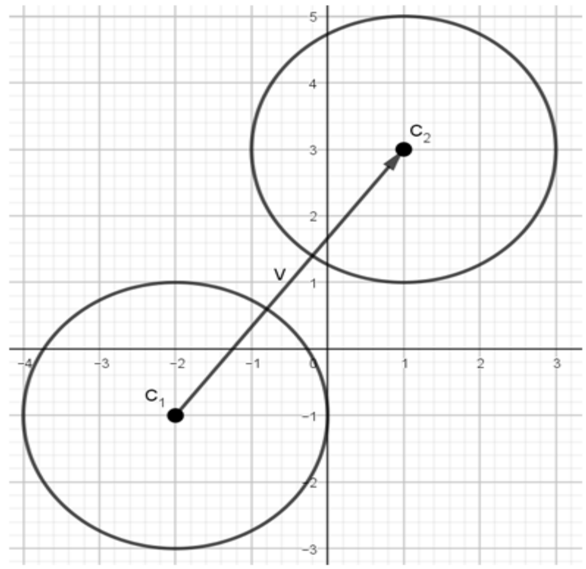
La ecuación de la C_1 está dada por
$(x+2)^2+(y+1)^2=4$

De ahí deducimos que el centro C_1 es la coordenada (-2,-1) y el radio es 2

Aplicamos el vector de traslación al centro de C_1 para obtener la coordenada dónde irá ubicado el centro C_2

$$\begin{array}{c} C_1(-2,-1) \\ \underline{V(+3,+4)} \\ C_2(1,3) \end{array}$$

La ecuación de la C_2 está dada por



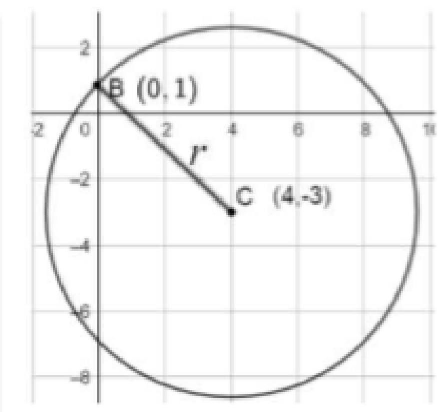
Problemas relacionados con la circunferencia

EJEMPLO 1 Determine la ecuación de la circunferencia de centro $C:(4,-3)$ y que pasa por el punto $B:(0,1)$.

Para obtener la ecuación general de la circunferencia necesitamos el centro y el radio.

Primero: El centro ya lo tenemos $C:(4,-3)$

Segundo: El radio lo obtenemos calculando la distancia entre el centro de la circunferencia $C:(4,-3)$ y un punto de la circunferencia $B:(0,1)$. Es decir,



$r=d((x_1,y_1),(x_2,y_2))$

$d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$, $d((4,-3),(0,1))=\sqrt{(4-0)^2+(-3-1)^2}$, $r=4\sqrt{2}$

Tercero: Sustituyendo estos valores de C y r obtenemos la ecuación de la circunferencia solicitada.

$$(x-4)^2+(y+3)^2=32$$